Metody numeryczne w zastosowaniach energetycznych

Laboratorium 3 – Układy równań liniowych

1. Metoda eliminacji Gaussa

W podstawowym wariancie tej metody możemy wyróżnić dwa etapy rozwiązania. Pierwszy z nich polega na przekształceniu pełnej macierzy współczynników **A** do macierzy trójkątnej. Etap ten nazywamy eliminacją (lub krokiem w przód). Elementy macierzy współczynników przekształcamy zgodnie z zależnością

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\left(a_{kj}^{(k-1)}\right) \tag{1}$$

gdzie $k = 1, 2, ..., n-1$ jest bieżącym krokiem eliminowanego układu oraz $i = k+1,\ k+2,\ n$; $j = k+1,\ k+2, ...,\ n+1$ są indeksami numeru wiersza i kolumny. Natomiast elementy a_{ij} są współczynnikami rozszerzonej macierzy układu $\widetilde{\mathbf{A}}$.

$$\underset{nx(n+1)}{\widetilde{\mathbf{A}}} = \left\lfloor \underset{nxn}{\mathbf{A}} \mid \underset{nx1}{\mathbf{P}} \right\rfloor \tag{2}$$

Przybliżona liczba operacji numerycznych na tym etapie wynosi $\approx \frac{1}{3}n^3$.

W drugim etapie rozwiązania znajdujemy wartości niewiadomych x_i, posługując się przekształconą trójkątną macierzą współczynników

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right) \tag{3}$$

gdzie $i = n, n-1, ..., 1$.

Etap ten określany jest mianem rekursji (krok wstecz). Przybliżona liczba operacji w tym kroku wynosi $\approx \frac{1}{2}n^3$.

Przykład 1.

Korzystając z metody eliminacji Gaussa wyznaczyć niewiadome dla układu równań

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 17 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases} \tag{4}$$

Przekształcamy układ równań do postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 17 \\ 11 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Rozpoczynamy proces eliminacji od podzielenia pierwszego równania przez element $a_{11} = 6$.

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{6}=1 & \frac{3}{6}=0.5 & \frac{6}{6}=1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{30}{6}=5 \\ 17 \\ 11 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Następnie, zgodnie z zależnością (1) ($k=1$), przekształcamy równania drugie i trzecie ($i=2,3$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2-1\cdot 2=0 & 3-0.5\cdot 2=2 & 3-1\cdot 2=1 \\ 1-1\cdot 1=0 & 2-0.5\cdot 1=1.5 & 2-1\cdot 1=1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 17-5\cdot 2=7 \\ 11-1\cdot 5=6 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

W efekcie przekształcenia w pierwszej kolumnie na głównej przekątnej otrzymujemy jedynkę, a pozostałe wyrazy pierwszej kolumny są zerowe. Teraz dzielimy drugi wiersz układu przez $a_{22}=2$ ($k=2$), otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3.5 \\ 6 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Następnie zgodnie z równaniem (1) przekształcamy trzeci wiersz układu ($i=3$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1.5-1\cdot 1.5=0 & 1-0.5\cdot 1.5=0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3.5 \\ 6-3.5\cdot 1.5=0.75 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3.5 \\ 0.75 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

W efekcie przekształcenia w drugiej kolumnie na głównej przekątnej otrzymujemy jedynkę, a wyrazy pod główną przekątną zerują się. Dzielimy teraz trzecie równanie przez a_{33} ($k=3$) i otrzymujemy układ równań przekształcony do postaci trójkątnej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3.5 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Pozostał do wykonania ostatni etap rozwiązania, tzw. krok wstecz (rekursja). Łatwo można rozwiązać przekształcony układ równań zgodnie ze wzorem (3), otrzymując kolejno

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= 3.5-0.5\cdot 3=2 \\ x_1 &= 5-0.5\cdot 2-1\cdot 3=1 \end{aligned} \tag{13}$$

2. Metoda iteracyjna Gaussa

Rozważmy układ trzech równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = p_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = p_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = p_3 \end{cases} \tag{14}$$

Aby w metodzie iteracyjnej Gaussa wyznaczyć niewiadome, należy wykonać następujące operacje:

1) Z pierwszego równania w układzie równań (14) wyznaczamy niewiadomą x_1

$$x_1^k = \frac{p_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{k-1} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{k-1} \tag{15}$$

gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots$ – bieżący numer iteracji. Następnie wyznaczamy niewiadomą x_2 z drugiego równania w układzie równań (14).

$$x_2^k = \frac{p_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{k-1} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{k-1} \tag{16}$$

Następnie z ostatniego równania wyznaczamy niewiadomą x_3

$$x_3^k = \frac{p_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{k-1} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{k-1} \tag{17}$$

2) Zakładamy dowolne, początkowe wartości poszukiwanych niewiadomych x_1^0, x_2^0, x_3^0.
3) Podstawiamy obrane w poprzedniej iteracji wartości niewiadomych do równań (15-17)
4) Powtarzamy krok 3. aż do uzyskania żądanej dokładności rozwiązania (porównujemy wartości niewiadomych w kolejnych iteracjach)

Proces iteracyjny może okazać się rozbieżny lub słabo zbieżny (w zależności od przyjętych wstępnie wartości początkowych niewiadomych).

Przebieg ćwiczenia:

1. Sprawdź poniższy kod implementujący metodę Gaussa, spróbuj podać na wejście inną macierz. Rozwiąż dowolny, inny układ równań 3x3.

```
clear all; close all
% Dane
A = [6 3 6; 2 3 3; 1 2 2];
C = [30 17 11];
% Rozwiązanie
[m, n] = size(A);
[i, h] = size(C);
while m ~= n | n ~= h | i ~= 1;
    error('Błędny rozmiar macierzy')
end
A(:, 1+n) = C;
for i = 1:n
    p = A(i, i);
    while p == 0.0
        error('Dzielenie przez zero, pozycja: ')
        i
    end
```

```
    A(i, i) = p - 1.0;
    for k = i+1:n+1
        d = A(i, k) / p;
        for j = 1:n
            A(j, k) = A(j , k) - d * A(j, i);
        end
    end
end
X = A(:, 1 + n)
```

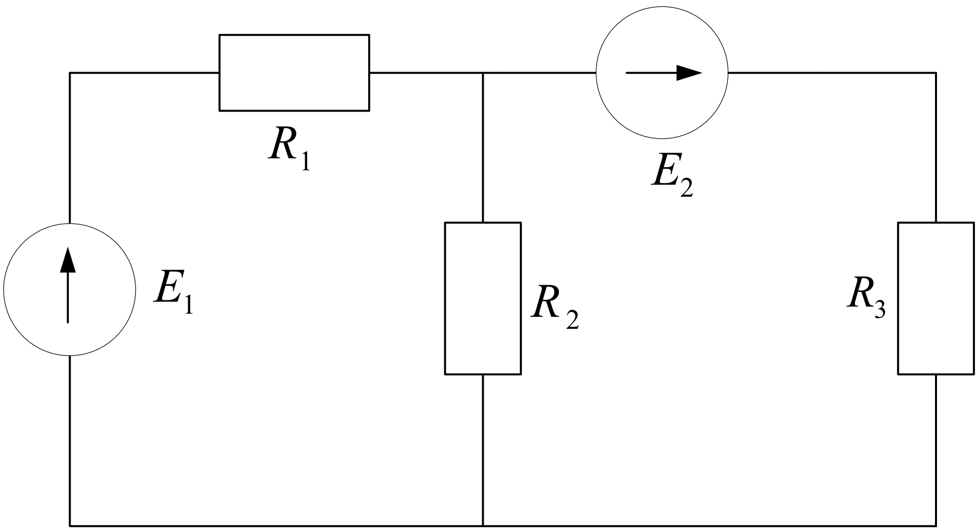
2. Korzystając z powyższego skryptu rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \tag{18}$$

3. Napisz w Matlabie skrypt implementujący metodę iteracyjną Gaussa i rozwiąż poniższy układ równań. Przetestuj program dla liczby iteracji równej $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$, $N = 10$.

$$\begin{cases} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \end{cases} \tag{19}$$

4. Przy zastosowaniu praw Kirchhoffa napisz równanie macierzowe i oblicz prądy gałęziowe w obwodzie



$R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 5\Omega, E_1 = 5\,\text{V}, E_2 7\,\text{V}$

Sformułuj macierz główną (macierz **A**), macierz niewiadomych (natężenia prądu) i macierz wyrazów wolnych (**b**). Przetestuj działanie metody Gaussa z punktu 1. oraz metody iteracyjnej Gaussa z punktu 3 na tym przykładzie. Wyniki porównaj z operacją lewostronnego dzielenia w Matlabie (**A****b**).