Metody numeryczne w zastosowaniach energetycznych

Laboratorium 4 – Interpolacja

1. Interpolacja to szczególny przypadek aproksymacji; to grupa metod numerycznych polegająca na wyznaczaniu w zadanym przedziale funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim ustalone wartości w odpowiednich węzłach. Interpolacja jest stosowana często w badaniach doświadczalnych w celu określenia związków pomiędzy wielkościami oraz do uproszczenia złożonych funkcji.

Matematycznie proces interpolacji można opisać następująco. Mając dane dla punktów węzłowych interpolacji x_i w przedziale $\langle a,b \rangle$ takich że

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \tag{1}$$

wartości funkcji ilustrujące pewien proces (np. z badań doświadczalnych)

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \tag{2}$$

poszukujemy postaci takiej funkcji $F(x)$, aby dla punktów węzłowych były spełnione równania

$$F(x_i) = y_i = f(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Wariantem interpolacji jest ekstrapolacja, gdy przy spełnieniu tych samych warunków co w interpolacji poszukuje się wartości funkcji $F(x)$ poza przedziałem $\langle a,b \rangle$. Przeprowadzenie interpolacji wymaga przyjęcia pewnej z góry założonej postaci poszukiwanej funkcji. W zależności od tej postaci najczęściej stosuje się interpolacje:

a) wielomianową Newtona (interpolacja liniowa, kwadratowa, sześcienna itd.),
b) wielomianową Czebyszewa,
c) wielomianową Hermite'a,
d) wielomianową Lagrange'a,
e) trygonometryczną (wśród nich interpolacja szeregami Fouriera).

2. Interpolacja wielomianami Lagrange'a

W przypadku gdy wielomian interpolujący ma postać

$$f_i(x) = L_{i-1}(x) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i - x_n)} \tag{5}$$

Mamy do czynienia z interpolacją Lagrange'a. Wielomian ten zeruje się we wszystkich punktach $a = x_1, x_2, \ldots x_n = b$, co oznacza, że spełnia warunki interpolacji.

Przykład 1. Dany jest zbiór punktów (tabela). Dokonać interpolacji Lagrange'a.

i	1	2	3
x_i	0	1	2
y_i	0	1	4

Wzór interpolacyjny ma postać

$$p(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \tag{6}$$

Budujemy kolejne wielomiany Lagrange'a

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \tag{7}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2) \tag{8}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1) \tag{9}$$

Wracając do wzoru (6) otrzymujemy

$$p(x) = 0 \cdot \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 1 \cdot (-x)(x-2) + 4 \cdot \frac{1}{2}x(x-1) = -x^2 + 2x + 2x^2 - 2x = x^2 \tag{10}$$

Przebieg ćwiczenia

1. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Przetestuj działanie funkcji *polyval* na tym przykładzie. Narysuj wykres tej funkcji.

2. Dane są 4 punkty o współrzędnych podanych w tabeli. Przetestuj działanie poniższego skryptu.

x	-1	0	2	4
y	1	1	2	-1

```
x = [-1, 0, 2, 4];
y = [1, 1, 2, -1];
a = polyfit(x, y, 3);
s = linspace(-2, 5, 1000);
figure
plot(s, polyval(a,s), 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot(x, y, 'r.' ,'MarkerSize', 15)
```

3. Dane są pomiary napięcia i natężenia prądu przechodzącego przez rezystor.

U[V]	-1274	-193	-41	41	193	1274
I[A]	-2	-1	-0.5	0.5	1	2

Przebieg charakterystyki rezystora powinien być liniowy. Jednak powyższe wyniki sugerują, że otrzymano przebieg krzywoliniowy. Aby oszacować tę krzywą należy dopasować ją do podanych węzłów i ich wartości za pomocą wielomianu interpolacyjnego. Na podstawie zależności (4-5) oraz Przykładu 1. napisz w Matlabie skrypt, który automatycznie będzie określał wielomian Lagrange'a dla podanego zadania. Określ parametr, który będzie odpowiadał za rząd wielomianu Lagrange'a – przeprowadź testy dla wielomianu 2-go, 3-go, 4-go, 5-go i 6-go rzędu. Podaj wartość natężenia prądu I dla napięcia $U = 500$ V. Porównaj wyniki z wynikami otrzymanymi przy pomocy funkcji *polyfit* i *polyval*.

4. Dla tabeli z punktu 3. wykorzystaj funkcję *spline*. Sprawdź jak wygląda charakterystyka rezystora wykreślona przy pomocy tej funkcji.

5. Przetestuj działanie wbudowanych funkcji *interp1*, *pchip*.