Metody numeryczne w zastosowaniach energetycznych

Laboratorium 6 – Całkowanie numeryczne – ciąg dalszy

1. Iteracyjny algorytm Romberga

Jest to iteracyjna metoda obliczania całek. Na każdym kroku wykonujemy iteracje. Jeśli przez j oznaczymy numer iteracji, a przez k stopień obliczania całki R, to całkę można obliczyć wzorem rekurencyjnym

$$R_{0,0} = \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big) \tag{1}$$

$$R_{j,k} = \frac{4^k R_{j,k-1} - R_{j-1,k-1}}{4^k - 1} \tag{2}$$

gdzie:

$R_{j,k-1}$ i $R_{j-1,k-1}$ – bardziej i mniej dokładna całka w poprzednim kroku.

$R_{j,k}$ – całka o poprawionej dokładności w aktualnym kroku.

Iteracje należy prowadzić, aż zostanie spełniony warunek

$$\left|\frac{R_{j,k} - R_{j-1,k}}{R_{j,k}}\right| \le \varepsilon \tag{3}$$

gdzie: ε – założona wartość błędu.

Jeśli przyjąć stopień całkowania $k=1$ to otrzymujemy całkowanie zgodne z metodą trapezów, dla $k=2$ otrzymuje się metodę Simpsona z regułą jednej trzeciej.

2. Metoda Monte Carlo

W tej metodzie po wykonaniu standaryzacji przedziału całkowania wybiera się losowo punkty ξ_i z przedziału $\langle -1, 1\rangle$ i oblicza się dla nich wartości funkcji $F(\xi_i)$. Następnie całkę oblicza się ze wzoru

$$J = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \tag{4}$$

gdzie n jest dostatecznie dużą liczbą losowań. Metoda ta znajduje szerokie zastosowanie w przypadku obliczania całek po obszarach wielowymiarowych.

Przebieg ćwiczenia

Rozpatrzymy problem numerycznego obliczania całki

$$J = \int_1^5 \sqrt{x - \frac{1}{x}}\,dx \tag{5}$$

1. Przeanalizuj i uzupełnij poniższy kod algorytmu Romberga. Narysuj wykres funkcji podcałkowej w przedziale całkowania. Porównaj wyniki algorytmu dla różnych wartości parametru m.

W zaznaczonym miejscu dopisz kod programu, który będzie przerywał pętlę jeśli program osiągnie zadaną dokładność (wzór nr 3), przyjmij $\varepsilon = 1e-15$. Skorzystaj ze zmiennej $Rnum$, która przechowuje kolejne przybliżenia w formie wektora.

Narysuj wykres błędów metody w zależności od liczby iteracji algorytmu.

```
clear all
close all

% Algorytm całkowania bazujący na ekstrapolacji Romberga
% fun - funkcja podcałkowa f(x) w formie string'a
% a - dolna granica całkowania
% b - górna granica całkowania
% m - maksymalna liczba iteracji w algorytmie
% Rnum - wektor kolejnych przybliżeń całki

m = 20;
a = 1;
b = 5;
epsilon = 1e-15;

fun = 'sqrt(x-1./x)';

%% iteracyjny algorytm Romberga
R = ones(m,m); % macierz Romberga
hmin = (b-a)/2^(m-1);

for k = 1 : m
    h = 2^(k-1)*hmin;
    x = a : h : b;
    f1 = eval(fun);
    k1 = length(f1);
    R(k,1) = 0.5*h*(f1(1) + 2*sum(f1(2:k1-1)) + f1(k1)); % metoda trapezów dla pierwszej
kolumny
end

for k = 2 : m
      for kk = 1 : (m-k+1)
          R(kk,k) = R(kk,k-1)+(R(kk,k-1) - R(kk+1,k-1))/(4^(k-1)-1);
      end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%% tutaj trzeba dopisać kod dot. błędu %%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
end
Rnum = R(1,:);

%% sprawdzenie i wykres
fun = @(x) sqrt(x-1./x);
Q = quad(fun, a, b)
xx = a:0.01:b;
figure
plot(xx, fun(xx), 'LineWidth', 1.5)
```

2. Oblicz poniższą całkę implementując metodę Monte Carlo (wzór nr 4). Skorzystaj z instrukcji z poprzednich zajęć (ten sam kod dotyczący standaryzacji przedziału).

$$J = \int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)dx \tag{6}$$

Porównaj wynik uzyskany metodą Monte Carlo z wynikiem uzyskanym z wykorzystaniem wbudowanej funkcji $quad$. Przetestuj metodę dla liczby punktów w tabeli.

n	10	100	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
J										
n	9000	10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000
J										

Na podstawie tabeli narysuj wykres $J = f(n)$.

3. Siła na maszcie żaglowym może być reprezentowana przez następującą funkcję:

$$f(x) = 200\left(\frac{x}{5+x}\right)e^{\frac{-2x}{h}} \tag{7}$$

gdzie: x – wysokość nad pokładem, h – wysokość masztu.

Istnieje możliwość określenia całkowitej siły wywieranej na maszt poprzez obliczenie całki tej funkcji po zmiennej wysokości nad pokładem w granicach wysokości masztu:

$$F = \int_{0}^{h} f(x)dx \tag{8}$$

Wyznacz wartość F gdy $h = 20$. Do wyliczenia całki użyj algorytmu Romberga lub metody Monte Carlo.