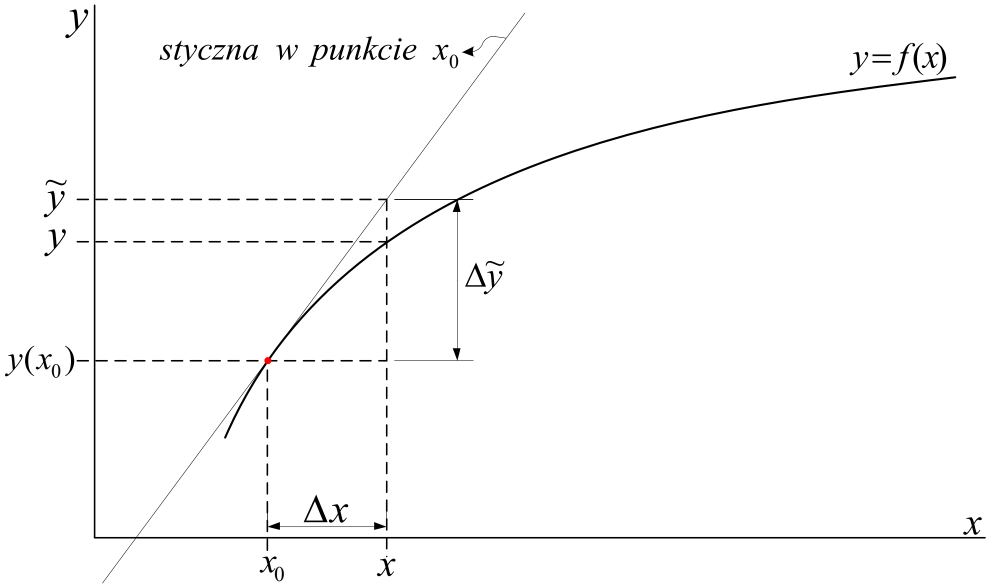
Laboratorium I – szeregi Taylora

Twierdzenie Taylora mówi, że każda gładka funkcja może być przybliżona za pomocą wielomianu. Funkcją gładką określamy taką funkcję, której wszystkie pochodne n-tego rzędu: a) istnieją, b) są ciągłe.



Dana jest funkcja

$$y = f(x) \tag{1}$$

Na podstawie wykresu stycznej do funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 możemy napisać

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y} - y_0 \tag{2}$$

Definiując pochodną w punkcie x_0 za pomocą ilorazów różnicowych otrzymujemy

$$y'(x_0) = \frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta x} \tag{3}$$

Na równaniu (3) wykonujemy kolejne przekształcenia

$$y'(x_0) = \frac{\Delta\tilde{y}}{\Delta x} \quad \Big| \cdot \Delta x \tag{4}$$

$$\Delta\tilde{y} = y'(x_0)\Delta x \tag{5}$$

Następnie wracamy do równania (2)

$$\tilde{y} = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x \tag{6}$$

A zatem

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \tag{7}$$

Co stanowi w praktyce liniową ekstrapolację funkcji. Prawa strona równania to 2 pierwsze wyrazy w szeregu Taylora. Pełna postać tego szeregu wygląda następująco:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} y^{(k)}(x_0) + \ldots \tag{8}$$

Rozwinięcie funkcji wielomianowej n-tego rzędu w szereg Taylora n-tego rzędu stanowi ścisłe rozwiązanie – taka aproksymacja daje wtedy dokładny wynik. Dla innych funkcji (np. wykładnicza, sinusoidalna) ścisłe rozwiązanie da się otrzymać tylko przy nieskończonej liczbie wyrazów w szeregu. W praktyce tylko kilka pierwszych składowych daje wystarczające przybliżenie.

Dla skończonej liczby wyrazów można zdefiniować resztę R_n

$$y(x) = y(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} y^{(k)}(x_0) + R_n \qquad (9)$$

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi) \qquad (10)$$

gdzie ξ jest punktem leżącym w otoczeniu punktu x_0, tzn. $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$

Ocena ilości wystarczających składników opiera się na reszcie R_n.

(11)

Przebieg ćwiczenia

Dana jest funkcja $y = \log(2x^2 - 1)$

1. Znajdź rozwinięcie tej funkcji w szereg Taylora stopnia $k=0$, $k=3$, $k=5$, $k=8$ w otoczeniu punktu $x_0 = 1$. Narysuj wykresy funkcji oryginalnej oraz otrzymanych przybliżeń na jednym wykresie.
2. Wyznacz ogólny wzór rozwinięcia funkcji $y = f(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = 1$.
3. Wyznacz szerokość przedziału $[-d, d] = |x-1| < d$ wokół $x_0 = 1$, na którym $W_5(x)$ może zostać użyty do aproksymacji $f(x)$ z błędem $\varepsilon << 0.2$. Jaka będzie szerokość przedziału jeśli założymy błąd 0.01?