Metody numeryczne w zastosowaniach energetycznych

Laboratorium 8 – Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych, ciąg dalszy

1. Metoda trapezów

W metodzie trapezów pochodną aproksymujemy wzorem różnicowym w postaci

$$y' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right] \qquad n = 0, 1, \dots \tag{1}$$

Metoda jest niejawna, gdyż przybliżenie y_{n+1}, które należy obliczyć w n-tym kroku, występuje po lewej jak i w formie uwikłanej po prawej stronie równania (1). Jeżeli zatem funkcja f jest funkcją nieliniową względem y, to na każdym kroku należy rozwiązać nieliniowe równanie lub ich układ. Można to zrobić przy pomocy metody iteracyjnej, posługując się zestawem równań

$$y_{n+1}^{0} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \qquad \text{lub} \qquad y_{n+1}^{0} = y_{n-1} + 2h \cdot f(x_n, y_n) \tag{2}$$

$$y_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{2} h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}^{k}) + u_n \tag{3}$$

z podstawieniem

$$u_n = y_n + \frac{1}{2} h \cdot f(x_n, y_n) \tag{4}$$

gdzie k oznacza numer iteracji.

Wzór (2) jest tu wzorem wstępnym (*predictor*), a wzór (3) z podstawieniem (4) jest iteracyjnie używanym wzorem korygującym (*corrector*). Iteracje należy przeprowadzać do uzyskania odpowiednio małej różnicy szacowania wartości funkcji w dwu kolejnych iteracjach. Metodę tę cechuje lepsza stabilność i dokładność w porównaniu z najprostszymi metoda jawnymi. Wadą jest konieczność przeprowadzania iteracji, co wydłuża czas obliczeń.

2. Metoda Adamsa-Bashfortha-Moultona

Wzory Adamsa-Bashfortha dla wielomianów stopni od 1 do 3:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left(3f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x_{i-2}, y_{i-2})\right) \tag{5}$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}\left(23f(x_{i-1}, y_{i-1}) - 16f(x_{i-2}, y_{i-2}) + 5f(x_{i-3}, y_{i-3})\right) \tag{6}$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{24}\left(55f(x_{i-1}, y_{i-1}) - 59f(x_{i-2}, y_{i-2}) + 37f(x_{i-3}, y_{i-3}) - 9f(x_{i-4}, y_{i-4})\right) \tag{7}$$

Wzory Adamsa-Moultona dla wielomianów stopni od 1 do 3:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i)\right) \tag{8}$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}\left(5f(x_i, y_i) + 8f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x_{i-2}, y_{i-2})\right) \tag{9}$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{24}\left(9f(x_i, y_i) - 19f(x_{i-1}, y_{i-1}) - 5f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-3}, y_{i-3})\right) \tag{10}$$

Przebieg ćwiczenia

1. Uzupełnij poniższy skrypt implementujący metodę trapezów oraz rozwiąż poniższe równanie dla podanych warunków:

$$\frac{dy}{dt} = 4e^{0.8t} - 0.5y \tag{11}$$

Warunek początkowy: $y(0) = 2$. Przyjmij krok $h = 1$.

```
clear all
close all

%% Dane
N = 10;              % liczba kroków
y0 = 2;              % wartość początkowa funkcji
x0 = 0;              % początkowa wartość odciętej
h = 1;               % długość kroku
funxy = @(t,y) 4*exp(0.8*t) - 0.5*y;

y_exact = @(t) 4/1.3 * (exp(0.8 * t) - exp(-0.5 * t)) + 2*exp(-0.5*t);
y_ex(1) = y_exact(0);

%% Metoda trapezów

X(1) = x0;
Y(1) = y0;
yp = y0;

for ii = 1:N+1
    y =                         %% wzór 2 (jeden lub drugi)
    u =                         %% wzór 4
    X(ii+1) = X(ii) + h;

    yp = y;
    y =                         %% wzór 4

    Y(ii+1) = y;
    X(ii+1) = X(ii) + h;

    y_ex(ii+1) =                %% rozwiązanie ścisłe dla porównania
    epsilon(ii+1) =             %% wzór na błąd względny
end
```

Wyznacz y metodą trapezów dla $t = 0$ do $t = 10$. Porównaj otrzymane wyniki z rozwiązaniem ścisłym. Narysuj na jednym wykresie rozwiązanie otrzymane metodą trapezów oraz otrzymane metodą ścisłą. Oblicz błąd względny ε dla każdego kroku i wykreśl jego wykres.

2. Przeprowadź analizę rozwiązania otrzymanego metodą trapezów dla kroku $h = 0.1$, $h = 0.2$, $h = 0.5$, $h = 0.8$ dla liczby kroków $N = 50$. Porównaj wykresy błędów względnych dla każdego rozwiązania.

3. Uzupełnij poniższy skrypt dla metody A-B-M. Dopisz kod dotyczący błędu względnego tej metody, narysuj wykresy rozwiązania przybliżonego oraz ścisłego. Rozwiąż tą metodą poniższe równanie. Warunek początkowy: $y(0) = 0$.

$$\frac{dy}{dt} = \cos t \tag{12}$$

```
clear all
close all

%% Dane
N = 50;                 % liczba kroków
y0 = …                  % wartość początkowa funkcji
x0 = 0;                 % początkowa wartość odciętej
h = …                   % długość kroku
funxy = @(t,y) ……       % FUNKCJA

y_exact = @(t) ……       % JAKIE JEST ROZWIĄZANIE ŚCISŁE?
y_ex(1) = y_exact(0);

%% Metoda Adamsa-Bashfortha-Moultona

X(1) = x0;
Y(1) = y0;

X(2) = X(1) + h;
Y(2) = Y(1) + h * funxy(X(1), Y(1));
Y(2) = Y(1) + h * funxy(X(2), Y(2));

X(3) = X(2) + h;
Y(3) = Y(2) + h/2 * (3 * funxy(X(2), Y(2)) - funxy(X(1), Y(1)));
Y(3) = Y(2) + h/2 * (funxy(X(3), Y(3)) + funxy(X(2), Y(2)));

X(4) = X(3) + h;
Y(4) = Y(3) + h/12 * (23 * funxy(X(3), Y(3)) - 16*funxy(X(2), Y(2)) + 5*funxy(X(1), Y(1)));
Y(4) = Y(3) + h/12 * (5 * funxy(X(4), Y(4)) + 8*funxy(X(3), Y(3)) - funxy(X(2), Y(2)));

for ii = 5:N+1
    X(ii) = X(ii-1) + h;

    % wzór wstępny Bashfortha
    Y(ii) = Y(ii-1) + h/24 * (55 * funxy(X(ii-1), Y(ii-1)) - 59 * funxy(X(ii-2), Y(ii-2)) +
...
        37 * funxy(X(ii-3), Y(ii-3)) - 9 * funxy(X(ii-4), Y(ii-4)));

    % wzór korygujący Moultona
    Y(ii) = Y(ii-1) + h/24 * (9 * funxy(X(ii), Y(ii)) + 19 * funxy(X(ii-1), Y(ii-1)) - ...
        5 * funxy(X(ii-2), Y(ii-2)) + funxy(X(ii-3), Y(ii-3)));

end

for ii = 2:N+1
    y_ex(ii) =          %% rozwiązanie ścisłe
    epsilon(ii) =       %% błąd względny
end
```

4. Przeprowadź analizę rozwiązania otrzymanego metodą A-B-M dla kroku $h = 0.1$, $h = 0.2$, $h = 0.5$, $h = 0.8$ dla liczby kroków $N = 50$. Porównaj wykresy błędów względnych dla każdego z rozwiązań: z punktu 2-go dla metody trapezów oraz dla metody A-B-M.