Metody numeryczne w zastosowaniach energetycznych

Laboratorium 5 – Całkowanie numeryczne

Obliczanie całek oznaczonych jest ważnym problemem numerycznym pojawiającym się w szeregu zagadnień fizycznych. Najczęściej występuje w trakcie obliczania pracy, energii, momentów zginających itp.

1. Standaryzacja przedziału całkowania

Często stosowanym zabiegiem przed obliczeniem całki jest standaryzacja przedziału całkowania. Polega ona na zamianie dowolnego skończonego przedziału całkowania $\langle a,b\rangle$ na przedział $\langle -1,1\rangle$. Proces ten daje się opisać równaniami:

$$J=\int_a^b f(x)dx=\int_{-1}^1 F(\xi)d\xi \tag{1}$$

gdzie:

$$F(\xi)=\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi\right) \tag{2}$$

Zaletą stosowania standaryzacji jest uniezależnienie sposobu obliczania całki od długości przedziału zmienności zmiennej niezależnej.

2. Metoda Newtona-Cotesa

Całkę doprowadzamy do postaci standardowej wzorami (1 – 2), następnie przedział $\langle -1,1\rangle$ dzielimy na n równych podprzedziałów i wyznaczamy w punktach podziału wartości funkcji $F(\xi)$. Następnie funkcję podcałkową zastępujemy wielomianem stopnia $n-1$. Wielomian ten całkujemy algebraicznie lub stosujemy równanie

$$J=\int_{-1}^1 F(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^n H_i F(\xi_i) \tag{3}$$

gdzie współczynniki H_i należy dobrać w zależności od stopnia wielomianu.

1) najprostszy wariant całkowania otrzymuje się przyjmując $n=2$ (tzw. metoda trapezów), wtedy
$$J=F(-1)+F(1) \tag{4}$$
2) przyjmując $n=3$ otrzymujemy metodę Simpsona z regułą jednej trzeciej
$$J=\frac{1}{3}\left[F(-1)+4F(0)+F(1)\right] \tag{5}$$
3) dla $n=4$ mamy metodę Simpsona z regułą trzech ósmych
$$J=\frac{1}{8}\left[F(-1)+3F\left(-\frac{1}{3}\right)+3F\left(\frac{1}{3}\right)+F(1)\right] \tag{6}$$

Metodę Newtona-Cotesa można też stosować bez standaryzacji przedziału całkowania. Wtedy ogólnie

$$J = \int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\sum_{i=1}^{n} H_i f(x_i) \tag{7}$$

gdzie

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{n \cdot i! \cdot (n-i)!} \int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n} (\xi - j)}{\xi - i} d\xi \qquad \xi = \frac{x-a}{\Delta} \qquad n \cdot \Delta = b - a \tag{8}$$

3. Metoda Gaussa

Całkowanie metodą Gaussa polega także na zastąpieniu całki sumą iloczynów współczynników w_i (tu zwanych wagami) i wartości funkcji w punktach ξ_i.

$$J = \int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i F(\xi_i) \tag{9}$$

Tym razem jednak punkty ξ_i (odcięte) nie są rozmieszczone równomiernie w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. Ich położenie (wartości) jak i wielkości wag w_i trzeba wyznaczyć tak, aby wzór (9) był spełniony tożsamościowo dla wielomianu potęgowego możliwie wysokiego stopnia.

$$F(\xi) = a_0 + a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_{2n-1}\xi^{2n-1} \tag{10}$$

Jeśli podstawimy równanie (10) do równania (9) i wykonamy algebraiczne całkowanie wielomianu, to porównując ze sobą wyrażenia przy jednakowych współczynnikach wielomianu, otrzymamy układ $2n$ nieliniowych równań, w których niewiadomymi będą odcięte ξ_i i wagi $w_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Na przykład dla $n = 3$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2 = w_1 + w_2 + w_3 \\ 0 = w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + w_3\xi_3 \\ 2/3 = w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 + w_3\xi_3^2 \\ 0 = w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 + w_3\xi_3^3 \\ 2/5 = w_1\xi_1^4 + w_2\xi_2^4 + w_3\xi_3^4 \\ 0 = w_1\xi_1^5 + w_2\xi_2^5 + w_3\xi_3^5 \end{cases} \tag{11}$$

Tabela 1. Odcięte i wagi metody Gaussa

n	i	$\xi_i = -\xi_{n-i+1}$	$w_i = -w_{n-i+1}$
2	1	± 0,5773502692	1,0000000000
3	1	± 0,7745966692	0,5555555556
	2	0,0000000000	0,8888888889
4	1	± 0,8611363116	0,3478548451
	2	± 0,3399810436	0,6521451549
5	1	± 0,9061798459	0,2369268851
	2	± 0,5384693101	0,4786286705
	3	0,0000000000	0,5688888889

Przebieg ćwiczenia

Rozpatrzymy problem numerycznego obliczania całki

$$J = \int_{-5}^{4} (x^2 + \sin x + 6) dx \qquad (12)$$

Analityczny wynik całki to $J = 117,9773058$. Wartość ta będzie wartością referencyjną dla uzyskanych rozwiązań numerycznych.

1. Przeanalizuj i uzupełnij poniższy kod dla metody Newtona-Cotesa bez standaryzacji przedziału całkowania dla $n = 3$. Porównaj kod dla $n = 1$ i $n = 2$ z wzorami (4-6). Narysuj wykres funkcji podcałkowej w przedziale całkowania. Oblicz błąd metody dla poszczególnych stopni całkowania.

```
clear all
close all
% stopień całkowania (n = 1, 2, 3)
n = 3;
% liczba podziału przedziału całkowania
m = 10;
% dolna granica całki
a = -5;
% górna granica całki
b = 4;
% funkcja podcałkowa
fun = @(x) x.^2 + sin(x) + 6;

%% algorytm metody Newtona-Cotesa
dx = (b-a)/m;
x = a;
I = 0;
for i = 1:m
    switch n
        case 1
            x1 = x;
            x2 = x + dx;
            I = I + (fun(x1) + fun(x2)) * dx/2;
        case 2
            x1 = x;
            x2 = x + dx/2;
            x3 = x + dx;
            I = I + 1/3 * (fun(x1) + 4 * fun(x2) + fun(x3)) * dx/2;
        case 3
            x1 = ............
            x2 = .............
            x3 = ............
            x4 = .............
            I = .............
        otherwise
            error('Błędny stopień całkowania')
    end
    x = x + dx;
end
I
F1 = @(x) x.^2 + sin(x) + 6;
Q = quad(F1, a, b)
```

2. Przeanalizuj i uzupełnij poniższy kod dla metody Newtona-Cotesa ze standaryzacją przedziału całkowania. Porównaj wyniki uzyskane w poprzednim punkcie dla metody Newtona-Cotesa bez standaryzacji przedziału całkowania. Skorzystaj z wzorów (4-6). Oblicz błąd względny metody dla poszczególnych stopni całkowania.

```
clear all
close all

% stopień całkowania (n = 1, 2, 3)
n = 3;
% liczba podziału przedziału całkowania
m = 10;
% dolna granica całki
a = -5;
% górna granica całki
b = 4;
% funkcja podcałkowa
f = 'xx.^2 + sin(xx) + 6';

%% algorytm metody Newtona-Cotesa ze standaryzacją przedziału całkowania
fo = f
f1 = '((a+b)/2 + (b-a)/2 * ksi)'
f = strrep(f, 'xx', f1);
f = strcat('(b-a)/2 * (',f,')')
%% metoda trapezów
ksi = 1;
y1 = eval(f);
ksi = -1;
y2 = eval(f);
I1 = y1 + y2

%% metoda Simpsona z regułą jednej trzeciej
....................

%% metoda Simpsona z regułą trzech ósmych
....................

%% porównanie
F1 = @(x) x.^2 + sin(x) + 6;
a
b
Q = quad(F1, a, b)
```

3. Uzupełnij poniższy kod dla metody Gaussa ze standaryzacją przedziału całkowania. Uzupełnij wartości ξ_i oraz wagi w_i na podstawie Tabeli 1. Korzystając z wzoru (9) uzupełnij wyrażenie w pętli *for* , która oblicza całkę.

```
clear all
close all

% stopień całkowania (n = 1, 2, 3, 4)
n = 3;
% liczba podziału przedziału całkowania
m = 10;
% dolna granica całki
a = -5;
% górna granica całki
b = 4;
% funkcja podcałkowa
f = 'xx.^2 + sin(xx) + 6';

%% algorytm metody Gaussa ze standaryzacją przedziału całkowania
format long
switch n
    case 1
        X(1) = 0.5773502692;
        X(2) = -X(1);
        Y(1) = 1.0;
```

```
        Y(2) = 1.0;
    case 2
        X(1) = 0.7745966692;
        X(2) = -X(1);
        X(3) = 0;
        Y(1) = 0.5555555556;
        Y(2) = Y(1);
        Y(3) = 0.8888888889;
    case 3
        X(1) = ...
        X(2) = ...
        X(3) = ...
        X(4) = ...
        Y(1) = ...
        Y(2) = ...
        Y(3) = ...
        Y(4) = ...
    case 4
        X(1) = ...
        X(2) = ...
        X(3) = ...
        X(4) = ...
        X(5) = ...
        Y(1) = ...
        Y(2) = ...
        Y(3) = ...
        Y(4) = ...
        Y(5) = ...
    otherwise('Niewłaściwy stopień całkowania')
end

f1 = '((a+b)/2 + (b-a)/2 * ksi)';
f = strrep(f, 'xx', f1);
f = strcat('(b-a)/2 * (',f,')');

I = 0;
for i=1:n+1
    ksi = X(i);
    I = I + ... (wzór nr 9)
end
I

%% porównanie
F1 = @(x) x.^2 + sin(x) + 6;
a
b
Q = quad(F1, a, b)
```

4. Korzystając z powyższy trzech skryptów, oblicz całkę

$$J = \int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)dx \tag{13}$$

Narysuj wykres funkcji podcałkowej, porównaj wyniki metody Newtona-Cotesa ze standaryzacją i bez standaryzacji. Wyniki z metody Newtona-Cotesa porównaj z wynikami uzyskanymi za pomocą metody Gaussa.