Metody numeryczne w zastosowaniach energetycznych

Laboratorium 7 – Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

1. Problem początkowy

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad t \in (a,b) \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0 \qquad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \qquad t_0 \in (a,b) \tag{2}$$

Szczególnym przypadkiem problemu początkowego jest równanie różniczkowe rzędu pierwszego z warunkiem na niewiadomą funkcję. Równania wyższych rzędów sprowadza się do równania rzędu pierwszego i rozwiązuje niezależnie

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad t \in (a,b) \qquad y(t_0) = y_0 \qquad t_0 \in (a,b) \tag{3}$$

Metody numeryczne pozwalają na wyznaczenie zbioru wartości dyskretnych funkcji niewiadomej $y = y(t)$ począwszy od punktu początkowego t_0. Zbiór par (t_i, y_i) wyznacza się za następujących zależności (dla węzłów równoodległych $t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} = h = const$)

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h = t_0 + ih \\ y_{i+1} = y_i + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y)dt = y_i + \Delta y_i \qquad y_0 = y(t_0) \end{cases} \tag{4}$$

Całkę oznaczoną przez Δy_i oblicza się numerycznie na różne sposoby:

1) metody jednokrokowe (wartość delty zależy tylko od jednego kroku wstecz)
2) metody wielokrokowe (wartość delty zależy od kilku punktów wstecz)

Inna klasyfikacja dotyczy tzw. jawności metody. Wzór (4) dotyczył jawnych metod – wartość y_{i+1} liczona jest na podstawie znanych wartości funkcji danych lub obliczonych wcześniej w poprzednich punktach. Inną grupę stanowią metody niejawne gdzie wartość y_{i+1} zależna jest od siebie samej poprzez deltę Δy_i. Oblicza się ją stosując metody iteracyjne startujące z wstępnego określenia wartości $y_{i+1}^{(0)}$ znanego z metody jedno- lub wielokrokowej otwartej (jawnej).

Metody jawne:
1) metoda Eulera
2) metoda punktu środkowego
3) metoda Rungego-Kutty (w wielu wariantach)

Metody niejawne:
1) metoda trapezów
2) metoda Adamsa-Bashfortha-Moultona

Przebieg ćwiczenia

1. Napisz skrypt implementujący metodę Eulera oraz rozwiąż poniższe równanie dla podanych warunków:

$$\frac{dy}{dt} = 4e^{0.8t} - 0.5y \qquad (5)$$

Warunek początkowy: $y(0) = 2$. Przyjmij krok $h = 1$.

Wzór opisujący metodę Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h \qquad (6)$$

Schemat dla pierwszego kroku:

$$y(1) = y(0) + f(0,2) \cdot 1 \qquad (7)$$

gdzie: $y(0) = 2$ jest warunkiem początkowym, $f(0,2)$ to prawa strona równania (5)

$$f(0,2) = 4e^{0.8 \cdot 0} - 0.5 \cdot 2 = 3 \qquad (8)$$

A zatem

$$y(1) = 2 + 3 \cdot 1 = 5 \qquad (9)$$

Rozwiązanie ścisłe

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8t} - e^{-0.5t}\right) + 2e^{-0.5t} \qquad (10)$$

Dla $t = 1$

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8 \cdot 1} - e^{-0.5 \cdot 1}\right) + 2e^{-0.5 \cdot 1} = 6.19463 \qquad (11)$$

Wyznacz y metodą Eulera dla $t = 0$ do $t = 10$. Porównaj otrzymane wyniki z rozwiązaniem ścisłym danym wzorem (10). Narysuj na jednym wykresie rozwiązanie otrzymane metodą Eulera oraz otrzymane metodą ścisłą. Oblicz błąd względny ε dla każdego kroku i wykreśl jego wykres. Uzupełnij poniższy skrypt o wzór implementujący metodę Eulera (6) oraz wzór na błąd względny dla każdego kroku.

```
clear all
close all

y_exact = @(t) 4/1.3 * (exp(0.8 * t) - exp(-0.5 * t)) + 2*exp(-0.5*t);

h = 1;
y(1) = 2;
N = 4;
y_ex(1) = y_exact(0);
t = 0:h:N;

for ii = 1:N
    f = @(t,y) 4*exp(0.8*t) - 0.5*y;
    y(ii+1) = %% WZÓR IMPLEMENTUJĄCY METODĘ EULERA
    y_ex(ii) = y_exact(ii-1);
    epsilon(ii) = %% WZÓR NA BŁĄD WZGLĘDNY
end

%% WYKRESY
.
.
.
```

2. Rozwiąż równanie (5) metodą punktu środkowego

Wzór rekurencyjny:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + f(t_i, y_i) \cdot 2h \tag{12}$$

Metoda ta jest metodą dwukrokową, gdyż wartość y_{i+1} zależy od dwóch poprzednich wartości y_{i-1} i y_i. W związku z tym wymaga zastosowania procedury startowej dla obliczenia y_i. Najczęściej przyjmowanym sposobem rozpoczęcia obliczeń jest sekwencja wykorzystująca metodę Eulera:

$$y_0 = y(a) \text{ – warunek początkowy} \tag{13}$$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h \tag{14}$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + f(t_i, y_i) \cdot 2h \tag{15}$$

Krok 1.

$$y(1) = y(0) + f(0{,}2) \cdot 1 = 2 + 3 \cdot 1 = 5 \tag{16}$$

Krok 2.

$$y(2) = y(0) + f(1, y(1)) \cdot 2h = 2 + \left(4e^{0.8 \cdot 1} - 0.5 \cdot 5\right) \cdot 2 \cdot 1 = 14.80433 \tag{17}$$

Skorzystaj z powyższych obliczeń i zmodyfikuj kod implementujący metodę Eulera tak, żeby był realizowany algorytm metody punktu środkowego. Wyznacz y dla $t = 0$ do $t = 10$. Porównaj otrzymane wyniki z rozwiązaniem ścisłym danym wzorem (10). Narysuj na jednym wykresie rozwiązanie otrzymane metodą punktu środkowego, metodą ścisłą oraz metodą Eulera. Oblicz błąd względny ε dla każdego kroku i wykreśl jego wykres.

3. Metoda Rungego-Kutty w wersji klasycznej (metoda czwartego rzędu)

Celem rozwiązania równania (5) konieczne jest obliczenie czterech wartości pośrednich

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_i, y_i) \\
k_2 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h,\; y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h,\; y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= h \cdot f\left(t_i + h,\; y_i + k_3\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

Wtedy:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{19}$$

Uzupełnij poniższy skrypt o wzory opisujące metodę Rungego-Kutty. Porównaj błędy względne wszystkich metod rozważanych w instrukcji.

Wykreśl na jednym wykresie błędy względne metody Eulera, metody punktu środkowego oraz metody Rungego-Kutty.

```
clear all
close all

y_exact = @(t) 4/1.3 * (exp(0.8 * t) - exp(-0.5 * t)) + 2*exp(-0.5*t);

h = 1;
y(1) = 2;
N = 10;
f = @(t,y) 4*exp(0.8*t) - 0.5*y;

for ii = 2:N
    k1 = %% wzór na k1
    k2 = %% wzór na k2
    k3 = %% wzór na k3
    k4 = %% wzór na k4

    y(ii) = %% wzór na y metodą Rungego-Kutty

    y_ex(ii) = %% obliczanie rozwiązania ścisłego
    epsilon(ii) = %% wzór na błąd względny
end

figure
plot(1:N, y(1:N), 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot(1:N, y_ex(1:N), 'LineWidth', 1.5)
```